

Varianta 088

SUBIECTUL I

- a) 1.
- b) $O(0,0)$.
- c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- d) $-1+2i$
- e) 0
- f) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

SUBIECTUL II

- 1.
- a) 1.
- b) $\frac{3}{5}$.
- c) $\frac{1}{2}$.
- d) 2.
- e) 390.
- 2.
- a) $\frac{227}{60}$.
- b) $\frac{-1}{(x+1)^2}$.
- c) 1.
- d) $x = -1$ este asimptotă verticală.
- e) $1 + \ln \frac{3}{2}$.

SUBIECTUL III

- a) $(-1) \circ 2 = -1$.
- b) $x \circ y = 2xy + 2x + 2y + 1 = (2xy + 2x) + (2y + 2) - 1 = 2(y+1)(x+1) - 1$.
- c) Din b),
 $(x \circ y) \circ z = 4(y+1)(x+1)(z+1) - 1$.
 $x \circ (y \circ z) = 4(y+1)(z+1)(x+1) - 1$.
 Deci, $x \circ (y \circ z) = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in \mathbf{R}$.
- d) Luăm $a = b = -1 + \sqrt{2} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

e) Din **b)**, avem

$$x \circ y = 2(x+1)(y+1) - 1. \text{ Atunci } 2(x+1)(y+1) = 0.$$

Obținem $x = -1$ sau $y = -1$.

f) $(-2004) \circ (-2003) \circ \dots \circ (-1) \circ 0 \circ 1 \circ \dots \circ 2003 \circ 2004 = -1 < 0.$

g) Din **b)** obținem $a \circ a = 2(a+1)(a+1) - 1 = 2(a+1)^2 - 1.$

Presupunem $\underbrace{a \circ a \circ \dots \circ a}_{\text{de } k \text{ ori}} = 2^{k-1}(a+1)^k - 1, \text{ adevărată } \forall k \in \mathbf{N}^*, \forall a \in \mathbf{R}.$

Si demonstrăm $\underbrace{a \circ a \circ \dots \circ a}_{\text{de } k+1 \text{ ori}} = 2^k(a+1)^{k+1} - 1$

$$\underbrace{a \circ a \circ \dots \circ a}_{\text{de } k+1 \text{ ori}} = (\underbrace{a \circ a \circ \dots \circ a}_{\text{de } k \text{ ori}}) \circ a =$$

$$= 2[2^{k-1}(a+1)^k - 1] \cdot a + 2[2^{k-1}(a+1)^k - 1] + 2 \cdot a + 1 =$$

$$= 2^k(a+1)^k(a+1) - 1, \text{ adevărată, deci } \underbrace{a \circ a \circ \dots \circ a}_{\text{de } n \text{ ori}} = 2^{n-1}(a+1)^n - 1, \forall n \in \mathbf{N}^*, \forall a \in \mathbf{R}.$$

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}, x \in \mathbf{R}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0.$

c) $f'(x) = 0$, rezultă $x = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$		2	

Rezultă ca f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$.

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty.$

e) Din **d)**, deducem că f nu admite asimptotă orizontală spre $+\infty$.

Studiem asimptotă oblică.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x^2 + 4} - x] = 0$$

Avem că $y = x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

f) $\int_0^1 f'(x) dx = f(x) \Big|_0^1 = \sqrt{5} - 2.$

g) Dacă $x < 0$, din **c)** rezultă $f(11x) < f(21x)$ iar $f(1984x) < f(2004x),$

deci $f(11x) + f(1984x) < f(21x) + f(2004x)$. Atunci $x < 0$ nu poate fi soluție.
Analog, $x > 0$ nu poate fi soluție. Rămâne $x = 0$ este soluție unică.